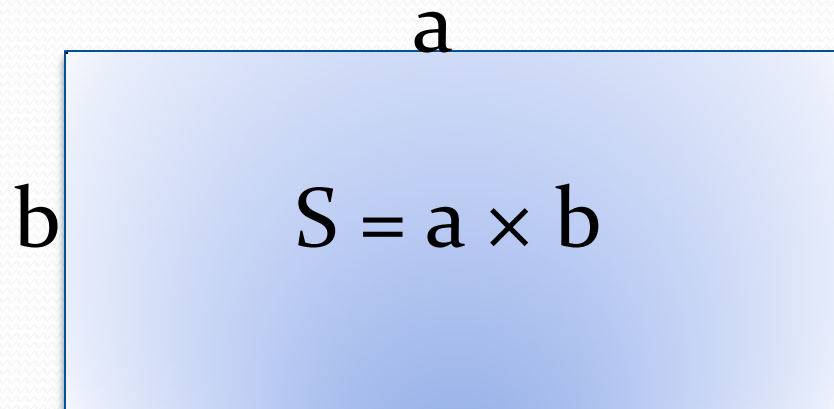




هر خط شکسته مسدود (به شرطی که هیچ دو قطعه ای از آن همدیگر را قطع نکنند) ناحیه محدودی از صفحه را در بر می گیرد .
این ناحیه از صفحه را سطح محدود به آن خط شکسته مسدود می نامند که آن را به اختصار سطح چند ضلعی یا مساحت چند ضلعی می گویند.

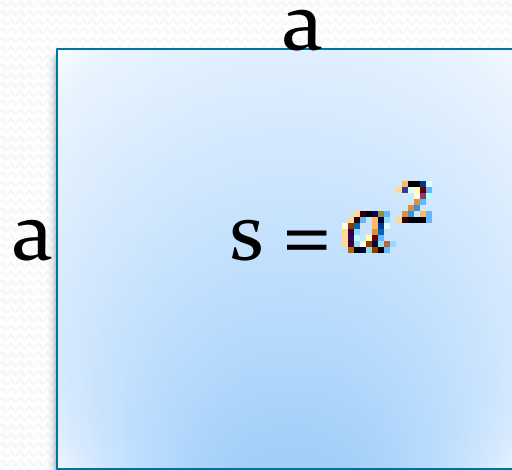


The diagram shows a light blue rectangle with a thin black border. The top horizontal side is labeled with the letter 'a', and the left vertical side is labeled with the letter 'b'. In the center of the rectangle, the formula $S = a \times b$ is written in black text.

مساحت یک چند ضلعی کمیتی اندازه پذیر می باشد و با یک عدد حقیقی مثبت متناظر است . اگر مساحت دو چند ضلعی مساوی باشد آن دو چند ضلعی را معادل گویند .

واحد مساحت

مساحت مربعی به ضلع یک سانتی متر را به عنوان واحد سطح در نظر می گیریم و آن را یک سانتی متر مربع می نامیم .



مساحت مستطیلی به طول a و به عرض b برابر با $a \times b$ است و مساحت مربعی به ضلع a برابر با a^2 می باشد . همچنین محیط مستطیل به صورت $P = 2(a+b)$ و محیط مربع به صورت $P = 4a$. مساحت شکل A را معمولا با علامت $S(A)$ نشان می دهند .

محیط چند ضلعی

مجموع طولهای اضلاع یک چند ضلعی نامیده می شود.
مثال :

سه برابر طول مستطیل با چهار برابر عرض آن مساوی است . اگر محیط مستطیل ۸۴ سانتی متر باشد مساحت مستطیل را حساب کنید .
پاسخ :

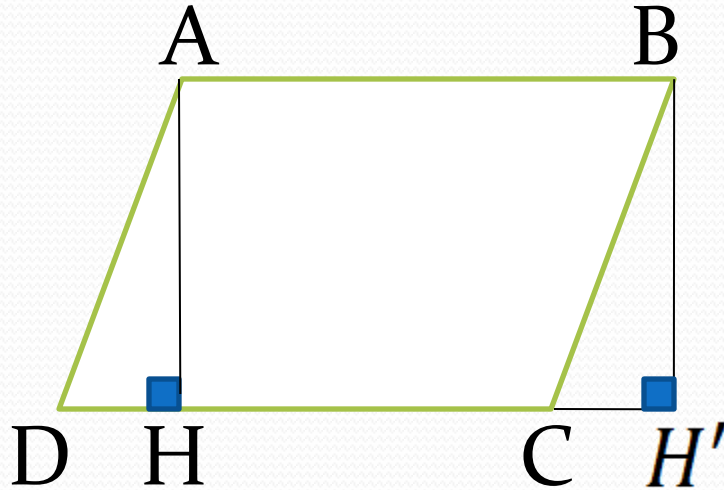
می توان طول مستطیل را $4x$ و عرض آن را $3x$ فرض کرد.

$$2 \times (3x + 4x) = 84 \rightarrow 14x = 84 \rightarrow x = 6$$

$$4 \times 6 = 24 \quad \text{طول} \qquad 3 \times 6 = 18 \quad \text{عرض}$$

$$S = 24 \times 18 = 432$$

مساحت متوازی الاضلاع برابر است با حاصلضرب قاعده ی آن در ارتفاع.
اثبات : AH و BH' را بر DC عمود می کنیم .

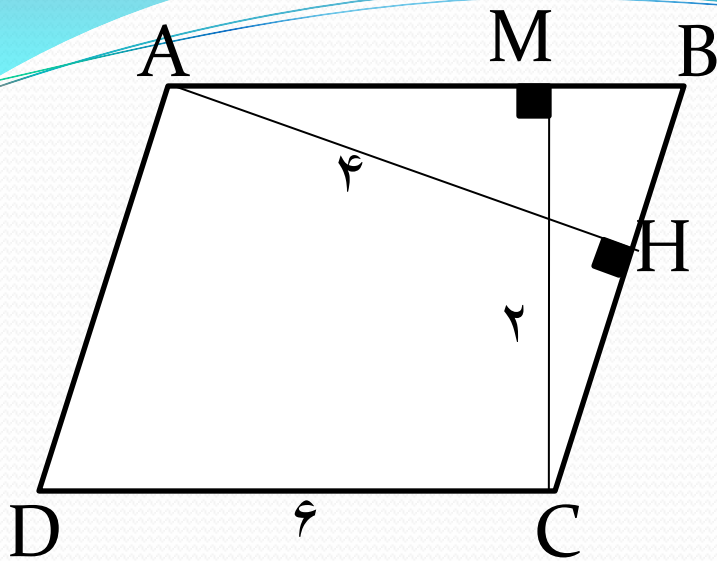


$$\begin{aligned} \triangle AHD &= \triangle BH'C \rightarrow S(\triangle AHD) \\ &= S(\triangle BH'C) \end{aligned}$$

بنابراین مستطیل $AHH'B$ با متوازی الاضلاع $ABCD$ معادل است.

$$S(ABCD) = S(AHH'B) = AH \times AB = AH \times DC$$

مثال: در شکل زیر طول ضلع BC چقدر است؟

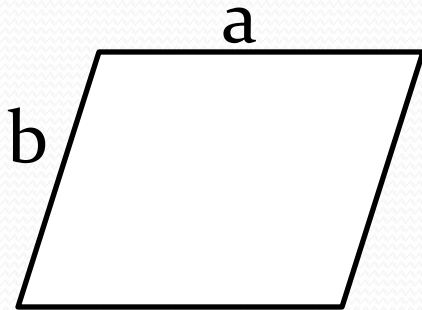


$$S(ABCD) = CM \times AB = AH \times BC$$

$$2 \times 6 = 4 \times BC \rightarrow BC = \frac{2 \times 6}{4} = 3$$

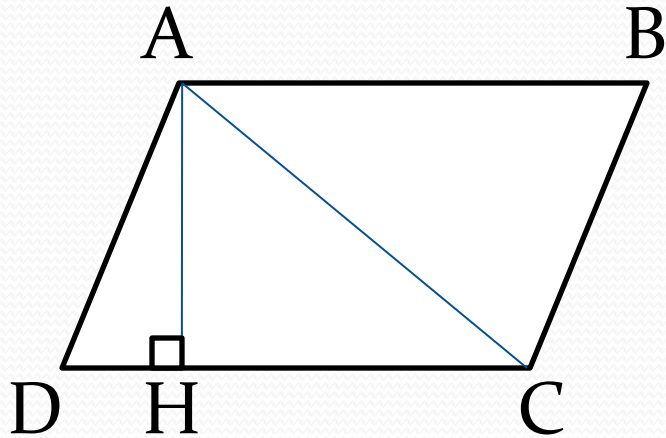
محيط متوازی الاضلاع

محيط متوازی الاضلاع با دو برابر مجموع دو ضلع مجاور آن برابر است.



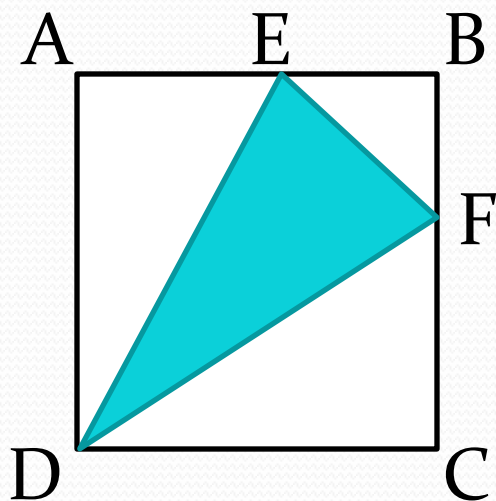
$$P=2(a+b)$$

مساحت مثلث برابر است با ارتفاع ضربدر قاعده تقسیم بر دو.
 اثبات: از رئوس A و C دو خط به موازات AB و BC رسم می کنیم.
 چهار ضلعی حاصل متوازی الاضلاع است.



$$S(ABC) = S(ACD) \rightarrow S(ABC) = \frac{1}{2}S(ABCD) = \frac{1}{2}AH \times BC$$

در شکل زیر ضلع مربع ۲۰ سانتی متر E و F وسط های AB و BC می باشند . مساحت ناحیه ی رنگی چقدر است ؟



$$S(ADE) = \frac{20 \times 10}{2} = 100$$

$$S(DFC) = \frac{20 \times 10}{2} = 100$$

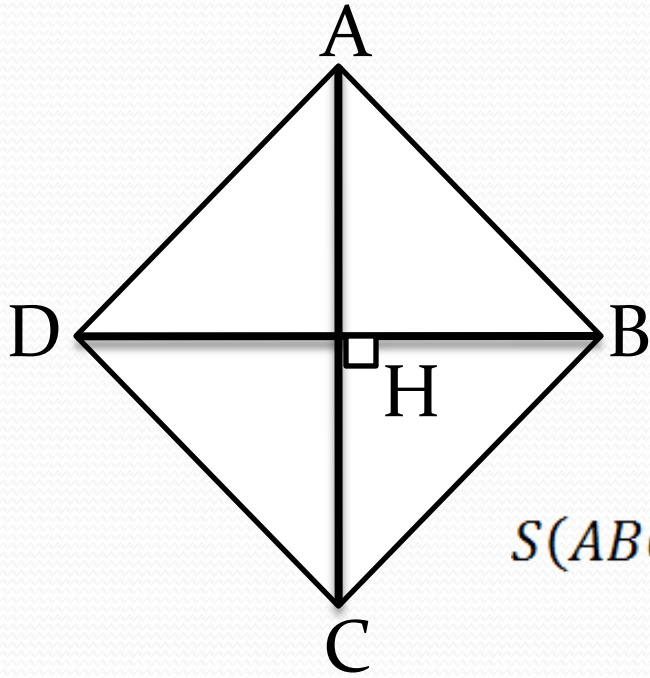
$$S(EBF) = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$

$$S(ABCD) = 20 \times 20 = 400$$

$$400 - (100 + 100 + 50) = 400 - 250 = 150$$

مساحت ناحیه رنگی

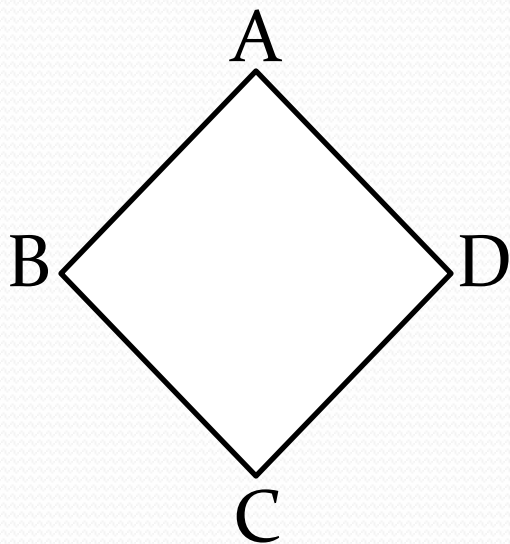
مساحت لوزی با نصف حاصلضرب دو قطر آن مساوی است .



$$\begin{aligned} S(ABCD) &= 2S(ABC) = 2 \times \left(\frac{BH \times AC}{2} \right) = BH \times AC \\ &= \frac{BD}{2} \times AC \end{aligned}$$

$$\rightarrow S(ABCD) = \frac{BD \times AC}{2}$$

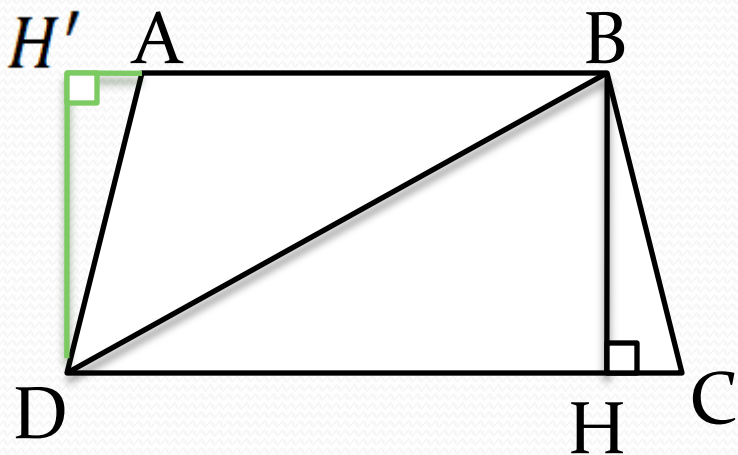
در شکل زیر ضلع لوزی ۲۰ سانتی متر و فاصله ی راس B تا ضلع CD برابر $19/2$ سانتی متر است . اگر قطر کوچک لوزی ۲۴ سانتی متر باشد ، قطر بزرگ آن چقدر است ؟



پاسخ

با توجه به اینکه لوزی نوعی متوازی الاضلاع است می توان گفت مساحت لوزی از یک طرف نصف حاصلضرب دو قطر و از طرف دیگر برابر حاصلضرب ارتفاع و قاعده می باشد .

مساحت ذوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده ضربدر ارتفاع تقسیم بر دو .



اثبات : قطر BD را رسم می کنیم خواهیم

داشت :

$$S(ABCD) = S(ABD) + S(BCD)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times DH' \times AB \right) + \left(\frac{1}{2} \times BH \times DC \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times BH \times AB \right) + \left(\frac{1}{2} \times BH \times DC \right)$$

$$= \frac{1}{2} BH (AB + DC)$$

مثال

قاعده های یک دوزنقه ۸ و ۱۲ سانتی متر و ارتفاع آن ۵ سانتی متر است . مساحت دوزنقه چقدر است ؟

$$S = \frac{(8 + 12) \times 5}{2} = \frac{20 \times 5}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

مساحت مربع = یک ضلع \times خودش

محیط مربع = یک ضلع $\times 4$

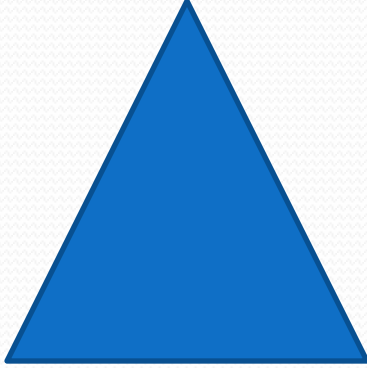


مساحت مستطیل = طول \times عرض

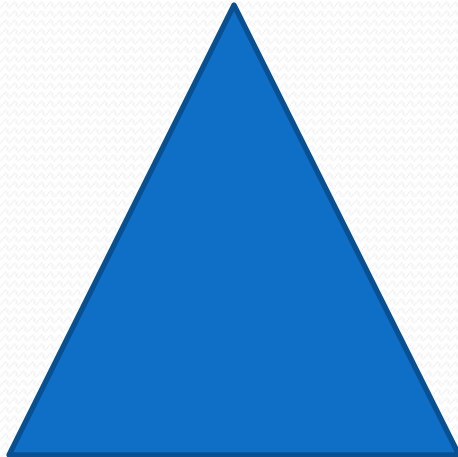
محیط مستطیل = $2 \times (\text{طول} + \text{عرض})$



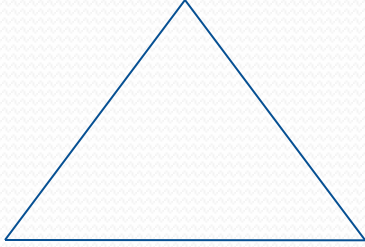
مساحت مثلث = (قاعده \times ارتفاع) \div ۲
محیط مثلث = مجموع سه ضلع



مساحت مثلث متساوی الاضلاع = (قاعده \times ارتفاع) \div ۲
محیط مثلث متساوی الاضلاع = یک ضلع \times ۳



مساحت مثلث متساوی الساقین = (قاعده \times ارتفاع) \div ۲
محیط مثلث متساوی الساقین = مجموع سه ضلع



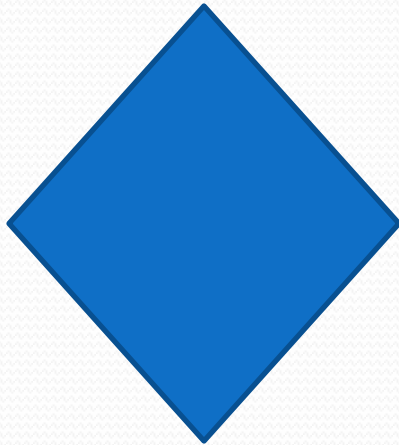
مساحت مثلث قائم الزاویه = (قاعده \times ارتفاع) \div ۲
محیط مثلث قائم الزاویه = مجموع سه ضلع



مساحت دوزنقه = (قاعده بزرگ + قاعده کوچک) × نصف ارتفاع
محیط دوزنقه = مجموع چهار ضلع



مساحت لوزی = (قطر بزرگ × قطر کوچک) ÷ ۲
محیط لوزی = یک ضلع × ۴



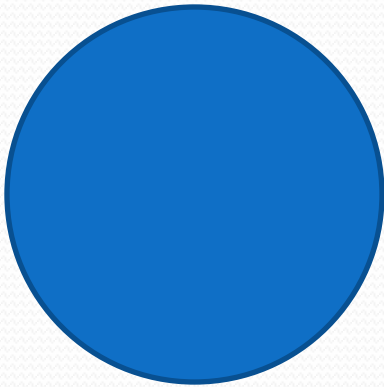
مساحت متوازی الاضلاع = قاعده \times ارتفاع

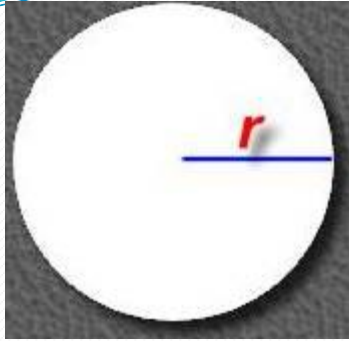
محیط متوازی الاضلاع = مجموع دو ضلع متوالی $\times 2$



مساحت دایره = عدد پی $(\pi/4)$ \times شعاع \times شعاع

محیط دایره = عدد پی $(\pi/4)$ \times قطر





مساحت یک دایره از فرمول زیر محاسبه می شود .

$$A = \pi r^2$$

اما این فرمول از کجا آمده؟ بگذارید پیدا کنیم .

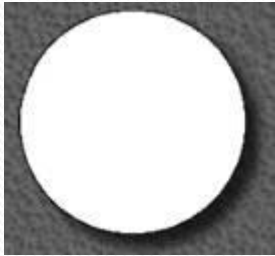
کاری که می خواهیم انجام دهیم شکستن دایره به قسمتهای

مساوی و بازآرایی آن به

شکل مستطیل می باشد که مساحت آن را می دانیم .

$$\text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت}$$

ممکن است شما باور نکنید که می شود قطعات یک



دایره را به مستطیل تبدیل کرد .

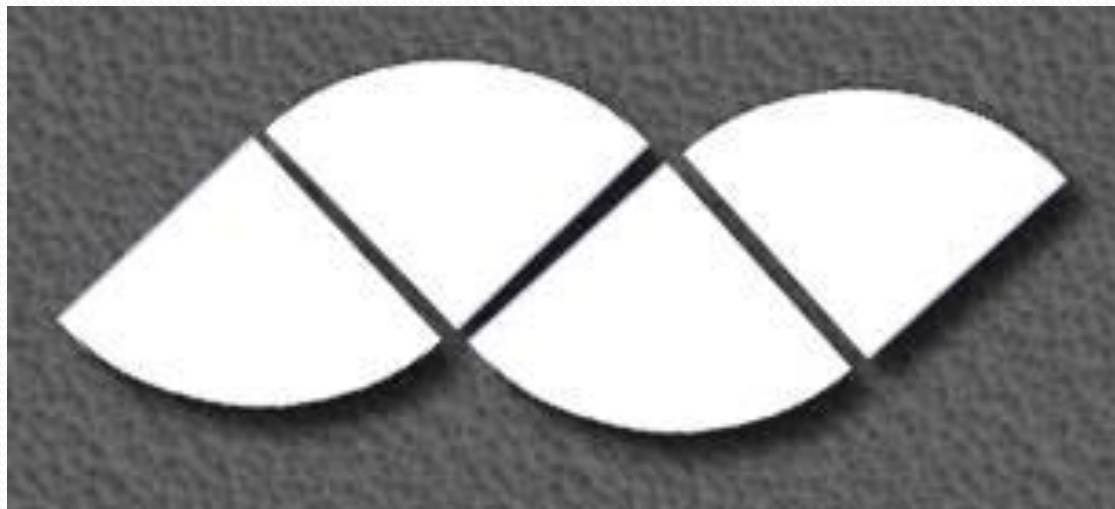
خوب، فقط نگاه کنید ... آسان است .

با دایره ای که می خواهیم بشکنیم شروع می کنیم .

حالا دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم .



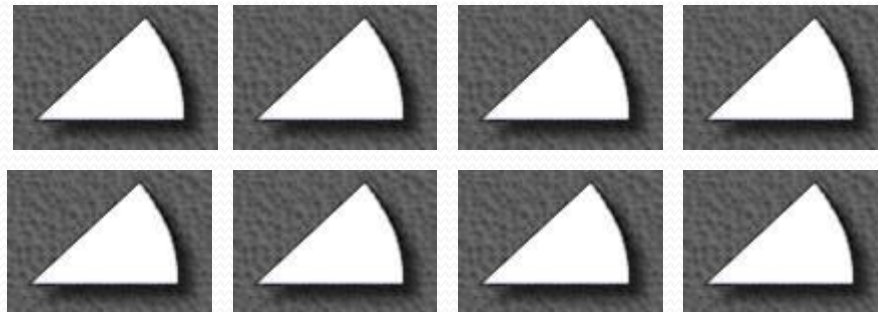
حالا آنها را طوری کنار هم می گذاریم تا یکی
مستطیل ایجاد شود .



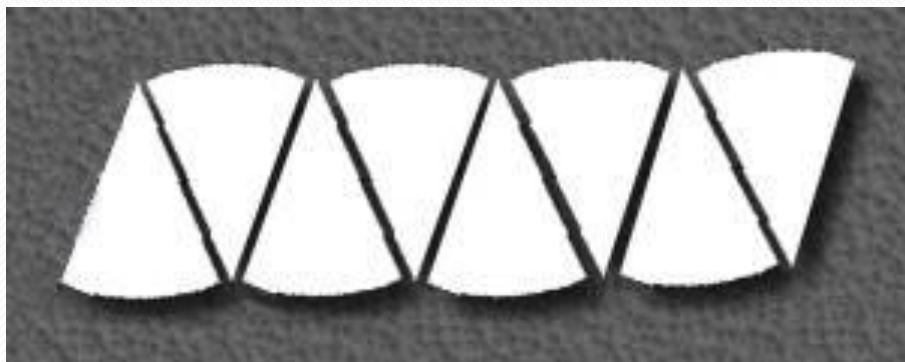
دقیقاً یک مستطیل نیست، هست؟

اما کار ما هنوز تمام نشده، بگذارید دایره را به هشت

قسمت مساوی تقسیم کنیم .



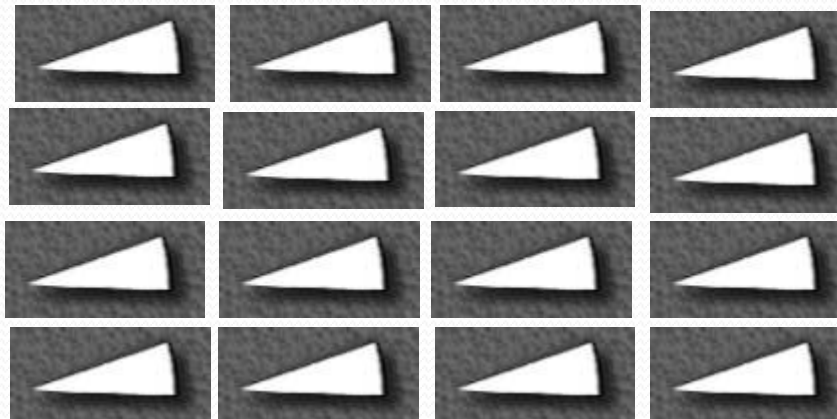
آنها را به شکل مستطیل مرتب می کنیم .



مطمئناً شروع کرده که شبیه یک مستطیل بشود، اما هنوز تا آنجا
فاصله داریم

قدم بعدی این است که به عقب برگردیم . و دایره را به شانزده
قسمت مساوی تقسیم کنیم

قطعات اینجا هستند



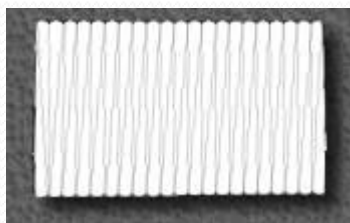
این دفعه وقتی آنها را کنار هم قرار می دهیم. خیلی بیشتر مثل مستطیل به نظر می رسند، ببینید .



- هدف ایجاد شکلی است که تا حد ممکن به مستطیل نزدیک باشد .
 - تا بتوانیم مساحت آن را با استفاده از فرمول مستطیل محاسبه کنیم .
- عرض × طول = مساحت

اما این شکل اضلاع صاف ندارد، بنابراین فرمول خیلی دقیق نمی باشد .

بگذارید یک قدم جلوتر برویم و دایره راه به گروهی خرده های کوچک تقسیم کنیم. وقتی تمام قطعات را کنار هم قرار می دهیم، شکل مانند زیر به نظر می رسد .



این خیلی شبیه یک مستطیل کامل است. اما می توانید ببینید که بالا و پائین هنوز کاملاً صاف نیستند. آنها کمی دست انداز دارند .

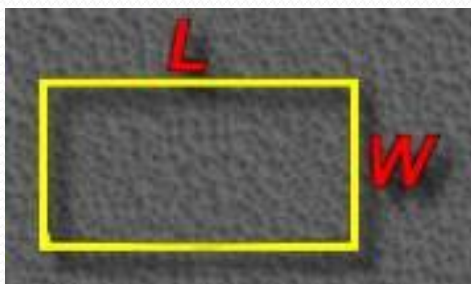
ی توانید تصور کنید که اگر باز هم به کارمان ادامه بدهیم چه اتفاقی خواهد افتاد؟ اگر به شکستن دایره به قطعات کوچکتر و کوچکتر ادامه دهیم؟ دست آخر، دست اندازه‌ها آنقدر کوچک می شوند که نمی توانیم آنها را ببینیم، و بالا و پائین شکل کاملاً مستقیم به نظر خواهند رسید. این چیزی است که خواهیم دید .



یک مستطیل کامل. حالا تمام کاری که باید انجام دهیم پیدا

کردن مساحت مستطیل با استفاده از

فرمول عرض \times طول = مساحت می باشد .



سوال بعدی این است که، طول و عرض

مستطیلی که از قطعات دایره ایجاد شده چه

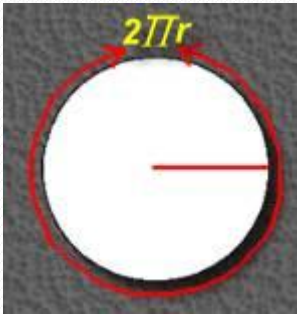
اندازه ای دارند؟



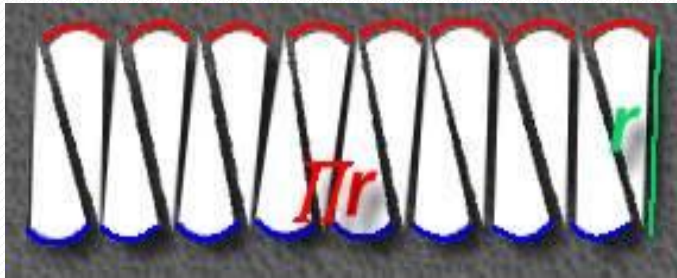
اجازه بدهید به عقب برگردیم، تا شما

قطعات دایره را واضحتر ببینید .

طول بیرونی دایره اصلی، مسافت پیرامون دایره، یا محیط دایره می باشد .



نصف این مسافت پیرامون، در بالای مستطیل و نصف دیگر آن در پایین قرار می گیرد .



به عبارت دیگر، تمام تکه های آبی و قرمز برابر محیط دایره می باشند .

کناره های مستطیل درست شعاع هر قطعه یا شعاع دایره می باشند .
حالا می توانیم مساحت شکل را با فرمول مستطیل محاسبه کنیم .

$$\begin{aligned} A &= L \times W \\ &= \pi r \times r \\ &= \underline{\pi r^2} \end{aligned}$$

... و در اینجا ما فرمول مساحت دایره ای را که با

آن شروع کردیم، داریم .